[Makara Journal of Science](https://scholarhub.ui.ac.id/science)

Volume 14
Issue 2 *November* | Article 34

11-25-2010

IDEAL MAKSIMAL DAN PRIMA DARI GELANGGANG POLINOM MIRING ATAS DAERAH BILANGAN BULAT GAUSS

Amir Kamal Amir
Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin, Makassar 90245, Indonesia, amirkamalamir@yahoo.com

IDEAL MAKSIMAL DAN PRIMA DARI GELANGGANG POLINOM MIRING ATAS DAERAH BILANGAN BULAT GAUSS

Amir Kamal Amir

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin, Makassar 90245, Indonesia

E-mail: amirkamalamir@yahoo.com

Abstrak

Misalkan R adalah suatu gelanggang dengan identitas *1*, σ adalah suatu automorfisma dari R, dan δ adalah suatu σ-derivatif. Gelanggang polinom miring atas R dalam variabel tak diketahui x adalah himpunan polinom-polinom $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ di mana $a_i \in R$ dengan aturan perkalian $xa = \sigma(a)\,x + \delta(a)$ untuk semua $a \in R$. Dalam *paper* ini, R adalah gelanggang bilangan bulat Gauss, yaitu $Z + Zi$, dengan $i^2 = -1$, σ adalah automorfisma dari R dengan aturan $\sigma(a + bi) = a - bi$, di mana $a,b \in Z$, gelanggang bilangan bulat, dan δ adalah σ-derivatif nol. Kita akan tunjukkan ideal maksimal dan prima dari gelanggang polinom miring seperti ini.

Abstract

Maximal and Prime Ideals of Skew Polynomial Ring Over the Gauss Integers Domain. Let R be any ring with identity *1*, σ be an automorphism of R and δ be a left σ-derivation. The skew polynomial ring over R in an indeterminate x is the set of polynomials $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ where $a_i \in R$ with multiplication rule $xa = \sigma(a)\,x + \delta(a)$ for all $a_i \in R$. In this paper, R is Gauss integers, i.e $Z + Zi$, where $i^2 = -1$, σ is the automorphism of R with $\sigma(a + bi) = a - bi$ where $a,b \in Z$, the ring of integers, and δ is the zero σ-derivation. We will show maximal and prime ideals of this skew polynomial ring.

Keywords: Gauss integers, maximal ideal, prime ideal, skew polynomial ring

1. Pendahuluan

Gelanggang polinom miring, sederhananya, adalah himpunan polinom-polinom dengan aturan perkalian yang tidak bersifat komutatif. Lebih jelasnya, gelanggang polinom miring atas R dalam variabel tak diketahui x adalah himpunan polinom-polinom $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ dimana $a_i \in R$ dengan aturan perkalian $xa = \sigma(a)\,x + \delta(a)$ untuk semua $a_i \in R$.

Dewasa ini, gelanggang polinom miring banyak digunakan dalam dunia aplikasi. Seperti yang ditunjukkan oleh Zers [1] yang menggunakan gelanggang polinom miring untuk mentransfer sistem kontrol teori (klasik) ke dalam sistem kontrol linier abstrak. Selanjutnya, pengkajian sifat-sifat dan kelakuan sistem kontrol linier diterjemahkan menjadi pengkajian struktur, sifat, dan kelakuan sitem linier abstrak terkait. Misalnya dengan memanfaatkan hasil-hasil yang diperoleh dalam bidang aljabar.

Uraian ini memberikan penegasan bahwa pengkajian sifat-sifat dan kelakuan sistem kontrol linier, yang banyak digunakan dalam dunia aplikasi, akan sangat terbantu jika kita mengetahui dengan baik sifat-sifat dan struktur gelanggang polinom miring tersebut.

Pengkajian tentang struktur dari gelanggang polinom miring $R[x;\sigma,\delta]$ untuk berbagai jenis gelanggang R sudah banyak dilakukan oleh beberapa peneliti terdahulu. Misalnya, McConnel dan Robson [2] dan Goodearl [3] mengkaji struktur dari gelanggang polinom miring $R[x;\sigma,\delta]$ untuk R adalah gelanggang Noether. Untuk kasus R adalah suatu daerah Dedekind, sejumlah hasil mengenai ideal maksimal dan ideal prima dari gelanggang polinom miring $R[x;\sigma,\delta]$ telah peneliti kembangkan [4-8]. Pada [5] diuraikan bentuk pusat dari gelanggang polinom miring dan ideal dari pusat gelanggang tersebut. Hasil ini dikembangkan pada [6] yang menguraikan bentuk ideal maksimal dan ideal prima dari gelanggang polinom miring. Pada [7] diuraikan bentuk ideal prima dari gelanggang polinom miring yang dapat digunakan untuk membangun suatu gelanggang faktor. Pada [8] ditunjukkan bahwa pasangan derivatif dari gelanggang polinom miring dapat dikembangkan menjadi pasangan derivatif pada gelanggang faktornya. Selain itu, ditunjukkan juga karakteristik ideal gelanggang koefisien yang dapat membangun suatu ideal pada gelanggang polinom miring.

Pada pembahasan sebelumnya, gelanggang polinom miring yang dibahas adalah gelanggang polinom miring atas suatu daerah dedekind. Dalam *paper* ini akan dipaparkan bentuk-bentuk ideal maksimal dan ideal prima dari gelanggang polinom miring $R[x;\sigma,\delta]$ dengan R adalah daerah bilangan bulat Gauss, yaitu $R = \mathrm{Z} + \mathrm{Z}i$, $\sigma(a + bi) = a - bi$ dan $\delta(a + bi) = 0$ untuk setiap $a + bi \in R$.

Untuk mendapatkan ideal-ideal maksimal dari R, dikembangkan dua cara, yaitu: pertama, R dikalikan dengan peubah x kemudian ditambahkan dengan suatu himpunan konstanta. Kedua, R dikalikan dengan konstanta kemudian ditambahkan dengan himpunan polinom-polinom. Untuk mendapatkan ideal prima, R dikalikan dengan polinom tak tereduksi.

2. Metode Penelitian

Misalkan R adalah suatu gelanggang, σ adalah suatu endomorfisma pada R, dan δ adalah suatu σ-derivatif, yaitu:

a. δ adalah suatu endomorfisma pada R, dengan R sebagai grup penjumlahan.
b. $\delta(ab) = \sigma(a)\delta(b) + \delta(a)b$ untuk setiap $a,b \in R$.

Gelanggang polinom miring $R[x;\sigma,\delta]$ dalam variabel tak diketahui x terdiri dari polinom dengan koefisien di R yang memenuhi aturan perkalian: untuk setiap $a \in R$ berlaku $xa = \sigma(a)x + \delta(a)$. Untuk kasus khusus ketika $\sigma = 1$ dan $\delta = 0$, gelanggang polinom miring $R[x;\sigma,\delta]$ tak lain adalah gelanggang polinom biasa $R[x]$. Untuk lebih jelasnya disajikan contoh sebagai berikut.

Contoh 2.1
Misalkan $R = \mathrm{Z} + \mathrm{Z}i$, yaitu himpunan bilangan bulat Gauss. Pemetaan σ pada R didefinisikan sebagai $\sigma(a + bi) = a - bi$ untuk setiap $a + bi \in R$. Pemetaan ini memenuhi syarat: $\sigma[(a+bi)+(c+di)] = \sigma[(a+bi)+\sigma(c + di)]$ dan $\sigma[(a + bi)(c + di)] = \sigma[(a + bi)\sigma(c + di)]$ sehingga σ merupakan suatu endomorfisma pada R. Selanjutnya, pemetaan δ didefinisikan sebagai $\delta(a+bi) = b$ untuk setiap $a + bi \in R$. Pemetaan δ yang didefinisikan seperti ini memenuhi syarat σ-derivatif seperti yang disajikan di atas. Dengan demikian $R[x;\sigma,\delta]$ merupakan suatu gelanggang polinom miring.

Salah satu perbedaan mendasar antara gelanggang polinom biasa dengan gelanggang polinom miring adalah sifat komutatifnya. Untuk R yang komutatif maka gelanggang polinom biasa $R[x]$ merupakan gelanggang komutatif sedangkan gelanggang polinom miring $R[x;\sigma,\delta]$ tidak. Untuk menunjukkan hal ini, ambil dua fungsi polinom $f(x) = (4 - 2i)x$ dan $g(x) = (3 - 5i)x$. Jika kedua polinom ini dikalikan dalam gelanggang polinom biasa $R[x]$ maka diperoleh hasil $f(x)g(x) = g(x)f(x) = (22 + 14i)x^2$ sedangkan jika kedua polinom ini dikalikan dalam gelanggang polinom miring $R[x;\sigma,\delta]$, seperti yang dimaksud pada contoh 2.1, akan diperoleh hasil perkalian yang berbeda antara $f(x)g(x)$ dengan $g(x)f(x)$. Perhatikan proses perkalian berikut ini,

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \left[(4-2i)x\right]\left[(3+5i)x\right] \\ &= (4-2i)\left[x(3+5i)\right]x \\ &= (4-2i)\left[\sigma(3+5i)x+\delta(3+5i)\right]x \\ &= (4-2i)(3-5i)x^2+(4-2i)5x \\ &= (2-26i)x^2+(20-10i)x \\ g(x)f(x) &= \left[(3+5i)x\right]\left[(4-2i)x\right] \\ &= (3+5i)\left[x(4-2i)\right]x \\ &= (3+5i)\left[\sigma(4-2i)x+\delta(4-2i)\right]x \\ &= (3+5i)(4+2i)x^2+(3+5i)(-2)x \\ &= (2+26i)x^2+(-6-10i)x \end{aligned}$$

perkalian di atas menunjukkan bahwa $f(x)g(x) \neq g(x)f(x)$.

Sifat tidak komutatif dari gelanggang polinom miring membuat struktur ideal dari gelanggang ini berbeda dengan struktur ideal dari gelanggang polinom biasa. Dalam tulisan ini, metode pembentukan ideal maksimal dan prima dari gelanggang polinom miring R dilakukan sebagai berikut:

1) Dibentuk himpunan dengan cara mengalikan R dengan peubah x. Agar himpunan ini memenuhi syarat ideal maka ditambahkan juga dengan himpunan konstanta tertentu.
2) Dibentuk himpunan dengan cara mengalikan R dengan suatu konstanta. Agar himpunan ini memenuhi syarat ideal maka ditambahkan juga dengan himpunan polinom-polinom tertentu. Dalam hal ini, himpunan polinom-polinom tersebut adalah himpunan polinom-polinom yang dibangun oleh satu polinom tertentu. Untuk mendapatkan ideal prima dilakukan dengan mengalikan R dengan suatu polinom tak tereduksi.

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa himpunan-himpunan yang telah dibentuk memenuhi syarat ideal maksimal atau ideal prima menggunakan sifat-sifat dasar aljabar.

3. Hasil dan Pembahasan

Bagian ini akan membahas mengenai gelanggang polinom miring atas daerah bilangan bulat Gauss

$R = D[x;\sigma]$. Di bagian ini akan digunakan simbol yang berbeda dengan bagian sebelumnya. Lebih jelasnya, akan digunakan simbol sebagai berikut: Misalkan $D = Z + Zi$, dengan $i^2 = -1$, yaitu himpunan bilangan bulat Gauss. Endomorfisma pada D didefinisikan sebagai $\sigma(a+bi) = a - b\,i$ untuk setiap $a+bi \in D$.σ-derivatif δ diambil sama dengan nol, yaitu $\delta(a+bi) = 0$ untuk setiap $a+bi \in D$. Dari data seperti ini diperoleh suatu gelanggang polinom miring $R = D[x;\sigma]$. Berikut disajikan beberapa bentuk ideal maksimal ditambah dengan satu bentuk ideal prima dari gelanggang polinom miring $R = D[x;\sigma]$.

Teorema 3.1
$M = (1+i)D + xR$ adalah ideal maksimal dari gelanggang polinom miring $R = D[x;\sigma]$.
Bukti:
Dengan mudah dapat dilihat bahwa M adalah suatu ideal dari $R[x;\sigma]$. Selanjutnya tinggal dibuktikan bahwa M adalah ideal maksimal.

Misalkan N adalah suatu ideal dari R dengan $M \subset N$ ($M \subseteq N$ tetapi $M \neq N$). Karena $M \subset N$ maka terdapat $f(x) \in N$dengan $f(x) \notin M$. Dengan demikian $f(x)$ bisa diibaratkan berbentuk seperti: $f(x) = (a+bi) + xg(x)$ dengan $a+bi \notin (1+i)D$ dan $g(x) \notin R$. Hal ini berarti bahwa $a+bi \neq (1+i)(c+di)$ $\forall (c+di) \in D$. Dari ketidaksamaan ini diketahui bahwa a dan b salah satunya harus bilangan ganjil dan satunya lagi bilangan genap. Dengan demikian kita berada pada dua kasus, yaitu: Kasus I, a genap dan b ganjil, Kaus II, a ganjil dan b genap.

Kasus I. Misalkan $a = 2k$ dan $b = 2l+1$ untuk suatu k dan l bilangan bulat. Dari sini diperoleh $a+bi = 2k + (2l+1)i \in N$ sehingga $[2k + (2l+1)i]i = (-2l-1) + 2ki \in N$. Pada sisi lain, $2k + 2li = (1+i)[k+l) + (l\text{-}k)i] \in M \subset N$. Jadi $i = [2k + (2l+1)\,i] - [2k + 2li] \in N$. Dengan demikian $1 = i(-i) \in N$ karena$1 \in N$, maka $N = R$.

Kasus II. Misalkan $a = 2k + 1$ dan $b = 2l$ untuk suatu k dan l. Dengan langkah yang analog dengan kasus I dapat dibuktikan bahwa$1 \in N$ sehingga $N = R$. Dari kasus I dan II diperoleh $N = R$. Dengan demikian M adalah ideal maksimal.

Berikut ini disajikan satu bentuk lain dari ideal maksimal dari gelanggang polinom miring $R = D[x;\sigma]$.

Teorema 3.2
$M = (x+1)R + 2R$ adalah ideal maksimal dari gelanggang polinom miring $R = D[x;\sigma]$.
Bukti:
Dengan mudah dapat dilihat bahwa M adalah suatu ideal dari $R[x;\sigma]$. Selanjutnya tinggal dibuktikan bahwa M adalah ideal maksimal. Proses pembuktian M sebagai ideal maksimal akan dilakukan dalam dua tahap. Pada tahap I akan ditunjukkan bahwa $x \notin M$ dan pada tahap II akan ditunjukkan M adalah ideal maksimal.

Tahap I. Andaikan $x \in M$ maka dengan memperhatikan bentuk dari M, dapat dimisalkan bahwa: $x = (x+1)f(x) + 2g(x)$ dengan $f(x), g(x) \in R$.

Misalkan: $f(x) = \sum_{j=0}^{m} (a_j + b_j i)x^j$

dan

$$g(x) = \sum_{j=0}^{n} (c_j + d_j i)x^j$$

Dengan $a_j, b_j, c_j, d_j \in Z$ untuk setiap j. Tanpa mengurangi sifat keumuman pembuktian, dapat dimisalkan $m = n$ karena jika $m < n$ maka dipilih $a_j = b_j = 0$ untuk $j = m+1, m+2, \cdots, n$, begitu juga sebaliknya. Dengan kalkulasi sederhana, dari persamaan $x = (x+1)\ f(x) + 2g(x)$ diperoleh sistem persamaan linier berikut:

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & & +2c_0 & = & 0 \\ a_0 & +a_1 & +2c_1 & = & 1 \\ a_1 & +a_2 & +2c_2 & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & +a_n & +2c_2 & = & 0 \\ a_n & & & = & 0 \end{array}.$$

Dapat dilihat bahwa sistem persamaan linier ini tidak mempunyai penyelesaian bilangan bulat. Dengan demikian terjadi kontradiksi. Jadi $x \notin M$, ini berarti $M \subset N$.

Tahap II. Misalkan N adalah suatu ideal dari R dengan $M \subset N$ ($M \subseteq N$ tetapi $M \neq N$). Misalkan $f(x) = (a_0 + b_0 i) + (a_1 + b_1 i)\,x + \cdots + a_n + b_n i)\,x^n \in N$, tetapi $f(x) \notin M$. Dalam bentuk lain $f(x)$ dapat ditulis seperti: $f(x) = (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) + i(b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n)$.

Dari bentuk penulisan terakhir ini dan mengingat bahwa $f(x) \notin M$ dan $2R \subseteq M \subset N$ maka tanpa mengurangi berlaku umumnya pembuktian dapat dimisalkan a_i dan b_i adalah bilangan ganjil atau nol untuk setiap i. Bahkan lebih jauh dari itu, dapat dimisalkan bahwa $a_i = 1$ atau $a_i = 0$ dan $b_i = 1$ atau $b_i = 0$. Dengan demikian, karena $f(x) \notin M = (x+1)R + 2R$ maka $f(x) = (1+x)g(x) + x$. Selanjutnya, karena $(1+x)g(x) \in M \subset N$ maka $x = [(1 + x)\ g\ (x) + x] - [(1 + x)\ g\ (x)] \in N$ sehingga $1 = (1 + x) - x \in N$. Karena $1 \in N$, maka$N = R$. Jadi, terbukti bahwa M adalah ideal maksimal.

Teorema 3.3
$M = (x+i)R + 2R$ adalah ideal maksimal dari gelanggang polinom miring $R = D[x;\sigma]$.
Bukti:
Dapat dilihat bahwa M adalah ideal dari $R = [x;\sigma]$. Selanjutnya tinggal dibuktikan bahwa M adalah ideal

maksimal. Proses pembuktian M sebagai ideal maksimal akan dilakukan dalam dua tahap. Pada tahap I akan ditunjukkan bahwa $x \notin M$ dan pada tahap II akan ditunjukkan M adalah ideal maksimal.

Tahap I. Andaikan $x \in M$ maka dengan memperhatikan bentuk dari M, dapat dimisalkan bahwa: $x = (x + i)f(x) + 2g(x)$ dengan $f(x) + g(x) \in R$. Misalkan

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m} (a_j + b_j i)x^j$$

dan

$$g(x) = \sum_{j=0}^{n} (c_j + d_j i)x^j$$

dengan $a_j, b_j, c_j, d_j \in Z$ untuk setiap j. Tanpa mengurangi sifat keumuman pembuktian, dapat dimisalkan $m = n$, karena jika $m < n$ maka dipilih $a_j = b_j = 0$ untuk $j = m + 1, m + 2, \cdots, n$, begitu juga sebaliknya.

Dengan cara yang sama dengan pembuktian teorema 3.2, kalkulasi sederhana dari persamaan $x = (x + i)f(x) + 2g(x)$ akan diperoleh sistem persamaan linier yang tidak mempunyai penyelesaian bilangan bulat Jadi diperoleh suatu kontradiksi. Dengan demikian $x \notin M$, yang berarti $M \subset R$.

Tahap II. Misalkan N adalah suatu ideal dari R dengan $M \subset N$ ($M \subseteq N$ tetapi $M \neq N$). Untuk membuktikan bahwa M adalah ideal maksimal, akan ditunjukkan bahwa $N = R$. Dengan menggunakan cara yang sama dengan pembuktian tahap II teorema 3.2 dapat dengan mudah dibuktikan bahwa $N = R$.

Teorema 3.4

Misalkan p adalah suatu bilangan bulat prima maka $P = (x^2 + p)R$ adalah suatu ideal prima dari R.

Bukti:

Perhatikan kembali proses perkalian dalam gelanggang polinom miring R. Misalkan $a + bi \in D = Z + Zi$ maka $x(a + bi) = (a - bi)x$ sehingga $x^2(a + bi) = (a + bi)x^2$. Dengan memperhatikan proses perkalian tersebut, dapat dilihat bahwa P adalah suatu ideal dalam R. Sifat prima dari P dapat dilihat dari polinom $x^2 + p$ karena polinom ini adalah polinom tak tereduksi maka jelas bahwa jika ada dua poinom $f(x)$ dan $g(x)$ dengan $f(x)g(x) \in P = (x^2+p)R$ maka salah satu dari mereka harus berasal dari $P = (x^2 + p)R$. Dengan demikian, terbukti bahwa $P = (x^2 + p)R$ merupakan suatu ideal prima dalam R.

4. Simpulan

Secara garis besar, ideal-ideal maksimal dalam R terbagi dua, yaitu ideal-ideal maksimal yang memuat x dan ideal-ideal maksimal yang tidak memuat x. Pada bagian pembahasan ditunjukkan bahwa $M = (1 + i)D + xR$ adalah ideal maksimal yang memuat x sedangkan $M = (x + 1)R + 2R$ dan $M = (x + i)R + 2R$ adalah ideal-ideal maksimal yang tidak memuat x. Ideal prima $P = (x^2 + p)R$ adalah ideal yang dibangun oleh polinom $x^2 + p$. Dari pembuktian teorema 3.4 terlihat bahwa P memenuhi syarat sebagai ideal prima karena $x^2(a + bi) = (a + bi)x^2$ dan $x^2 + p$ adalah polinom tak tereduksi dalam R.

Daftar Acuan

[1] E. Zerz, IMA J. Math. Control Inform. 23 (2006) 113.
[2] J.C. McConnell, J.C. Robson, Noncommutative Noetherian Ringss, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1987, p.596.
[3] K.R. Goodearl, J. Algebra 150/2 (1992) 324.
[4] A.K. Amir, P. Astuti, I. Muchtadi-Alamsyah, JP Journal of Algebra Number Theory and Applications 16 (2010) 101.
[5] A.K. Amir, P. Astuti, I. Muchtadi-Alamsyah, Prosiding Konferensi Nasional Matematika XIV, Palembang, Indonesia, 2008, p.69.
[6] A.K. Amir, P. Astuti, I. Muchtadi-Alamsyah, Proceeding of the 3rd International Conference on Mathematics and Statistics (ICoMS-3), Bogor, Indonesia, 2008, p.169.
[7] A.K. Amir, H. Marubayashi, Prosiding Konferensi Nasional Aljabar, Yogyakarta, Indonesia, 2009, p.243.
[8] A.K. Amir, Prosiding Konferensi Nasional Matematika UNPAR, Bandung, Indonesia, 2009, p.AA-1.